Ad-soyad : Cevap Anahtarı

Numara :

Lineer Cebir II Final Sınavı Soruları **29.05.2020**

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ permütasyonu veriliyor.

a) σ yı ayrık dairesel permütasyonların çarpımı olarak yazınız (5p). $\sigma = (1,2,3)(4,5,6)$

b) σ yı transpozisyonların çarpımı olarak yazınız (5p). $\sigma = (1,3)(1,2)(4,6)(4,5)$

c) $\sigma^{-1} = ?$ (5p) $\sigma^{-1} = (6,5,4)(3,2,1)$ (veya $\sigma^{-1} = (4,5)(4,6)(1,2)(1,3)$)

d) σ tek midir? Çift midir? (5p) σ çifttir.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $\widetilde{A} = ?$ (A nın eki) (8 p).

b) detA yı 3. satıra göre açarak hesaplayınız (8 p).

c) A nın tersi var mıdır? (4 p)

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b \\ 1 & a+2 & b \\ -2 & a+2 & -4b \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A nın tersinin olabilmesi için a ve b ne olmalıdır? (10 p)

b) AX=0 lineer denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümünün olması için a ve b ne olmalıdır? (10 p)

4) $\begin{cases} x + 4y + 7z = 17 \\ 2x + 5y + 8z = 19 \\ 3x + 6y + 10z = 12 \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor.

a) Determinant yardımıyla sistemin Cramer sistemi olup olmadığını belirleyiniz (10 p).

b) Verilen sistemi çözünüz (10 p).

5) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerlerini ve karakteristik vektörlerini bulunuz (20 p).

2) a) $\tilde{A}$ = işaretli minörler matrisinin transpozu.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}-27 & 6 & 13\\ 12 & 0 & -4\\ -3 & 6 & -3\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}-27 & 12 & -3\\ 6 & 0 & 6\\ 13 & -4 & -3\end{bmatrix},$$

b) $\det A = a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=(-1)(-3)+2.6-3.(-3)=24$

c) $\det A = 24 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ vardır.

3) a) A nın tersi vardır $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2b\\ 1 & a+2 & b\\ -2 & a+2 & -4b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2 & b\\ a+2 & -4b\end{vmatrix}+2b\begin{vmatrix}1 & a+2\\ -2 & a+2\end{vmatrix}=-5b(a+2)+6b(a+2)$$

$$=b(a+2)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow a\neq -2,\ b\neq 0$$

b) $AX=0$ ın sonsuz çözümü vardır $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

$\Leftrightarrow$ $a=-2$ veya $b=0$

4)
a) $$\begin{vmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 8\\ 6 & 10\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 8\\ 3 & 10\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 6\end{vmatrix}=2+16-21=-3\neq 0$$

$\Rightarrow$ Cramer sistemi

b) Cramer yöntemi uygulanırsa

$$x=\frac{\begin{vmatrix}17 & 4 & 7\\ 19 & 5 & 8\\ 12 & 6 & 10\end{vmatrix}}{-3}=-12,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 17 & 7\\ 2 & 19 & 8\\ 3 & 12 & 10\end{vmatrix}}{-3}=23,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4 & 17\\ 2 & 5 & 19\\ 3 & 6 & 12\end{vmatrix}}{-3}=-9$$

olarak bulunur.

5) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ olacak şekildeki λ ya

karakteristik değer, X vektörüne ise λ ya karşılık gelen karakteristik vektör denir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x_1 + 5x_2 = \lambda x_1 \\ x_2 = \lambda x_2 \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$ homojen lineer denklem sistemi

Bu sistemin sıfırdan farklı çözümleri için elde edilen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1$ karakteristik değerler.

Şimdi bu değerlere karşılık gelen karakteristik vektörleri bulalım:

<u>$\lambda = 1$ için:</u> $\lambda = 1$ için yukarıdaki lineer denklem sistemi

$$\begin{matrix} -2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$ halini alır. $x_2 = t$ dersek

$x_1 = \frac{5}{2}t$ olur ve $\lambda = 1$ için karakteristik vektörler

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$ şeklinde olur.

$\lambda = -1$ için: $\lambda = -1$ için

$$\begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$ lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu ise x_1 in serbest, x_2 nin temel değişken olması demektir. Yani, $x_1 = t$, $x_2 = 0$ şeklindedir. O halde, $\lambda = -1$ için karakteristik vektörler

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \neq 0, \ t \in \mathbb{R}$$ şeklindedir.